

Gruppenübung 11

Diffeomorphismen

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *globaler Diffeomorphismus* wenn

- f invertierbar ist und
- sowohl f als auch f^{-1} unendlich oft differenzierbar sind.

Um zu überprüfen ob eine Abbildung ein globaler Diffeomorphismus ist, ist folgende Charakterisierung hilfreich [1]:

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Diffeomorphismus wenn

- f unendlich oft differenzierbar ist,
- die Jacobimatrix von f an allen Stellen $x \in \mathbb{R}^n$ invertierbar ist und
- $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|f(x)\| = \infty$.

Aufgabe 1 Gegeben sei das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - (x_1 + x_2)^2 \\ x_1 + (x_1 + x_2)^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = x_2.$$

- Bestimmen Sie den relativen Grad des Systems.
- Bestimmen Sie eine glatte Koordinatentransformation auf Byrnes-Isidori-Normalform und erklären Sie ob es sich um eine globale Transformation handeln kann.

Aufgabe 2 Gegeben sei das System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + (x_1 + x_2)x_3 + (1 + x_1^2)u \\ \dot{x}_3 &= x_1 u \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

- Bestimmen Sie den relativen Grad r des Systems und transformieren Sie das System in Byrnes-Isidori-Normalform.
- Bestimmen Sie eine Zustandsrückführung $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sowie Anfangsbedingungen so dass $y(t) \equiv 0$.
- Bestimmen Sie die Nulldynamik des Systems und analysieren Sie diese (Ruhelagen, Stabilität).

Aufgabe 3 Gegeben sei das System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2 + x_3 - u \\ \dot{x}_2 &= x_1^3 + u \\ \dot{x}_3 &= -x_3 - 2u \\ y &= x_1 + x_2. \end{aligned}$$

- a) Bestimmen Sie den relativen Grad des Systems sowie eine Transformation auf Byrnes-Isidori-Normalform.
- b) Bestimmen Sie eine Zustandsrückführung $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sowie Anfangsbedingungen so dass $y(t) \equiv 0$.
- c) Bestimmen Sie die Nulldynamik des Systems und analysieren Sie diese (Ruhelagen, Stabilität).

Aufgabe 4 Gegeben Sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + 3x_2 + u \\ y &= x_1 + x_2.\end{aligned}$$

Prüfen Sie, ob das System beobachtbar ist und bestimmen Sie anschließend den relativen Grad und die Nulldynamik des Systems.

Literatur

- [1] Wu, Felix and Desoer, Charles, Global inverse function theorem, IEEE Transactions on Circuit Theory, 1972, Volume 19, Number 2, 199–201.